Tentamen Variatierekening en Optimale Besturingstheorie

Datum : 19-04-2011
Plaats :
Tijd : 14.00-17.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het systeem en kostencriterium:

$$\dot{x} = x + u, \qquad J(x_0, u) = \int_0^1 [x^2(t) + 2x(t)u(t) + u^2(t)]dt$$

   De bedoeling is dat J geminimaliseerd wordt.

   (a) Geef de Hamiltoniaan, bepaal de optimale besturing (als functie van toestand en co-toestand), en leidt de differentiaalvergelijking voor de co-toestand af.

   (b) Los de differentiaalvergelijkingen voor de toestand en co-toestand op.

   (c) Neem aan dat de waarde-functie voor dit probleem van de vorm $V(x,t) = \frac{1}{2}c(t)x^2$ is. Leidt een differentiaalvergelijking voor $c(t)$ af, en los deze op. Wat is de resulterende waarde-functie ?

   (d) Hoe had u *direct* (zonder toepassing van theorie) kunnen inzien dat $u = -x$ de optimale besturing is ?

2. Beschouw het scalaire systeem met kostencriterium

$$\dot{x} = u \qquad J(x_0, u, t_e) = x^2(t_e) + t_e + \int_0^{t_e} u(\tau)^2 d\tau \tag{1}$$

   De bedoeling is om de kosten te minimaliseren over zowel u als t_e.

   (a) Bepaal met behulp van dynamisch programmeren de optimale besturing, het resulterende toestandstraject en de optimale kosten als functie van x_0 en t_e.

   (b) Bepaal met behulp van het 'Minimum principe' de optimale besturing, het resulterende toestandstraject en de optimale kosten als functie van x_0 en t_e.

   (c) Gegeven is dat $x_0 \geq 1$. Wat is de optimale eindtijd t_e als het kostencriterium ook naar t_e geminimaliseerd wordt?

3. Beschouw de vergelijking

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 - 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 + 4x_1^2 \end{aligned}$$

   (a) Bepaal de evenwichtspunt(en).

(b) Lineariseer het systeem om het evenwichtspunt $(0,0)$. Wat kunt u op basis hiervan zeggen over de stabiliteit van dit evenwichtspunt ?

(c) Bewijs door middel van de kandidaat Lyapunovfunctie $V(x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ dat het evenwichtspunt $(0,0)$ asymptotisch stabiel is.

4. Beschouw een massa-veer systeem (q uitrekking van de veer, $p = m\dot{q}$ de impuls van de massa)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= -kq + u\end{aligned}$$

met m de massa, $k > 0$ de veerconstante, en u de uitwendige kracht.

(a) Bewijs dat de terugkoppeling $u = -\dot{q}$ het evenwichtspunt $(q,p) = (0,0)$ asymptotisch stabiel maakt.

(b) In de praktijk zal de grootte van de kracht u vaak begrensd zijn, zeg $|u| \leq M$ voor een $M > 0$. Definieer de functie sgn als $\text{sgn}(z) = 1$ indien $z > 0$ en $\text{sgn}(z) = -1$ indien $z < 0$.

Laat zien dat in dit geval het systeem asymptotisch stabiel kan worden gemaakt door de begrensde terugkoppeling

$$\begin{aligned}u &= -\dot{q}, && \text{if } |\dot{q}| \leq M \\ u &= -M\text{sgn}(\dot{q}), && \text{if } |\dot{q}| > M\end{aligned}$$

met gebruikmaking van de Lyapunov functie (= totale energie) $V(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$.

(c) Is het evenwichtspunt $(0,0)$ gebruikmakend van de feedback van deel (b) ook *globaal* asymptotisch stabiel ?

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 10, b: 5, c: 5, d: 5.

2. a: 10, b: 5, c: 5.

3. a: 5, b: 10, c: 10.

4. a: 10, b: 5, c: 5.